Экономические задачи в заданиях ЕГЭ по математике

Рассмотрим экономическую задачу №17 заданий ЕГЭ по математике профильного уровня. В данных задачах предлагается ознакомиться с разными схемами выплаты кредита банку со стороны заемщика.

Кредит – это ссуда, предоставленная банком заемщику под определенные проценты за пользование деньгами. Существует два вида платежей по кредиту: дифференцированный и аннуитетный.

Решение задач о кредитах в настоящее время очень актуально, так как жизнь современного человека тесно связана с экономическими отношениями, в частности, с операциями в банке.

Решение основывается на использовании различных математических моделей: уравнений, неравенств, их систем с привлечением процентов, арифметической и геометрической прогрессий, производной.

Задача № 1 на нахождение ежегодной выплаты

28 декабря 2018 года клиент взял в банке 5 460 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая - 20 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем клиент переводит в банк х рублей не позднее 28 декабря. Какой должна быть сумма х, чтобы клиент выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

Задача № 1 на нахождение ежегодной выплаты

Год	Долг банку	Остаток после ежегодной выплаты
0	S	-
1	1,2S	1,2S - x
2	1,2(1,2S - x) = 1,44S - 1,2x	1,44S - 1,2x - x= 1,44S - 2,2x
3	1,2(1,44S - 2,2x)=1,728S - 2,64x	1,728S - 2,64x - x= 1,728S - 3,64x

$1,728S - 3,64x=0$

$3,64x=1,728\cdot 5460000$

$x=2592000$ Ответ: 2592000 рублей

При решении таких задач можно увидеть закономерность и, оформив решение в общем виде, получить формулу.

S-сумма кредита,

p=, где r - процентная ставка,

x – сумма ежегодных выплат;

I год: S·p-x

II год:

III год:

IV год:

и т.д.

Задача № 2 на нахождение суммы кредита

15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15 числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что за первые 12 месяцев нужно выплатить банку 1370тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

Задача № 2 на нахождение суммы кредита

Пусть начальная сумма кредита равна S. По условию, ежемесячный долг перед банком должен уменьшаться равномерно: ; ; ; …; . Погашение долга состоит из двух частей: постоянной ежемесячной выплаты и ежемесячной равномерно уменьшающейся выплаты процентов ; ; ; ; ...; .

Известно, что за первые 12 месяцев нужно выплатить банку 1370тыс. рублей. Поэтому составляем уравнение:

12*+(=1370

S = = 2000тыс Ответ: 2 000 000 руб

Арифметическая прогрессия

Последовательность чисел, в которой каждое следующее отличается от предыдущего ровно на одну и ту же величину, называется арифметической прогрессией.

Любой член арифметической прогрессии вычисляется по формуле:

$$a_n = a_1 + \mathrm{d}(\mathrm{n}-1)$$

Формула суммы n-первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = n$$

Задача № 3 на нахождение общей суммы выплат

15 января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на **3%** по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

- Известно, что восьмая выплата составила 99,2 тыс. рублей.

Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования.

Задача № 3 на нахождение общей суммы выплат

Решение: S - сумма кредита, r = 3%

Вначале найдем сумму кредита. Известно, что восьмая выплата = 99,2тыс. Находим размеры выплат:

1-й месяц: + ; 2-й месяц: + ·; ...; 8-й месяц: + ·

= 99200 → S = 99 200· = 1 200 000, то есть планируется взять в кредит 1 200 000 рублей.

Общая сумма, которую нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования, складывается из суммы кредита и суммы ежемесячно начисляемых процентов на остаток долга по сумме кредита :

+ +…+)= + 1 200 000=1 488 000

Задача № 4 на вычисление процентной ставки

15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 15% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r?

Задача № 4 на вычисление процентной ставки

Пусть S сумма кредита. Долг перед банком должен уменьшаться до нуля равномерно. Тогда последовательность остатка по кредиту на конец каждого месяца будет иметь вид: ; ;….
Найдем выплаты: 1 месяц: + S; 2 месяц: + ; …9 месяц:

По условию общая сумма выплат после полного погашения кредита на 15% больше суммы, взятой в кредит, значит: + = 0,15 ; r = 3.

Задача № 5 на вычисление процентной ставки

Клиент взял кредит в банке на срок 40 месяцев. По договору он должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется p% этой суммы, затем следует платеж.

а) Ежемесячные выплаты подбираются таким образом, чтобы долг уменьшался равномерно.

б) Известно, что наибольший платеж был в 25 раз меньше первоначальной суммы долга. Найдите p.

Задача № 5 на вычисление процентной ставки

S - сумма кредита, p - процентная ставка.

Ежемесячный долг перед банком должен уменьшаться равномерно. Этот долг состоит из двух частей: постоянной ежемесячной выплаты и ежемесячной равномерно уменьшающейся выплаты процентов.

Выплата в 1-й месяц: $+ \cdot S$ и так как это наибольший платеж составим уравнение: $(+ \cdot S) \cdot 25 = S \quad \rightarrow \quad + p = 1, \quad p = 1{,}5$

Задача № 6 на нахождение количества лет выплаты кредита

В июле клиент планирует взять в кредит 1,1 млн. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года клиент должен выплатить некоторую часть долга.

На какое минимальное количество лет клиент может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 300тысяч рублей?

Задача № 6 на нахождение количества лет выплаты кредита

1) В конце первого года долг составит:

$1100000 \cdot 1,1 - 300000 = 910000$

2) В конце второго года долг составит:

$910000 \cdot 1,1 - 300000 = 701000$

3) В конце третьего года долг составит:

$701000 \cdot 1,1 - 300000 = 471000$

4) В конце четвертого года долг составит:

$471000 \cdot 1,1 - 300000 = 218210$

5) В конце пятого года долг составит:

$218210 \cdot 1,1 - 300000 \quad 0$, т.е. кредит будет погашен за 5 лет.

Ответ: 5 лет.

Задача № 7 на нахождение количества лет выплаты кредита

В июле взял кредит на сумму 9 млн рублей на несколько лет. Условия его возврата следующие:

- В начале каждого следующего года остаток долга увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- До 1 июля каждого года клиент должен вернуть банку часть долга таким образом, чтобы по состоянию на 1 июля долг ежегодно уменьшался на одну и ту же сумму.

Известно, что последняя выплата составила 1,25 млн рублей.

Найдите общую сумму выплат, которую клиент заплатит банку.

Задача № 7 на нахождение количества лет выплаты кредита

Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

9; ;…;

По условию каждый январь долг возрастает на 25%, т.е. последовательность начисленных процентов в январе такова:

0,25*9; 0,25* ;…; 0,25*

последняя выплата составила 1,25 млн рублей : =1,25; =9.

Значит, всего следует выплатить:

9+0,25**9*=20,25 (млн руб)

Задача № 8 на нахождение суммы кредита, в случае неравномерного погашения долга

15-го марта планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- Со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на одну и туже сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 10-го месяца долг составит 300 тысяч рублей;
- К 15-му числу 11 месяца долг должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1388 тысяч рублей?

Задача № 8 на нахождение суммы кредита, в случае неравномерного погашения долга

Решение: S - сумма кредита, r = 1%

Известно, что 15-го числа 10-го месяца долг составит 300 тысяч рублей. И 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на одну и туже сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Т.е. за первые 10 месяцев необходимо погасить S-300 тысяч рублей одинаковыми платежами, т.е. уменьшение долга с 1-го по 10-й месяц составляет тысяч рублей ежемесячно. Т.о., ежемесячный долг перед банком за первые 10 месяцев составляет: ; ; ; …; . Погашение долга за первые 10 месяцев состоит из двух частей: постоянной ежемесячной выплаты и ежемесячной равномерно уменьшающейся выплаты процентов ; ; ; …; .

В последний 11-й месяц общая выплата составила 300 + 300 тысяч рублей.

общая сумма выплат за 11 месяцев 1388=10 + + + … + 300 + 300 .

Ответ: 1300 тысяч

Задача № 8а на нахождение суммы кредита, в случае неравномерного погашения долга

15-го марта планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 17 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- Со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 16-й долг должен быть на одну и туже сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 16-го месяца долг составит 400 тысяч рублей;
- К 15-му числу 17 месяца долг должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1608 тысяч рублей? (ответ: 1200 тысяч рублей)

Задача № 8а на нахождение суммы кредита, в случае неравномерного погашения долга

Решение: S - сумма кредита, r = 3%

Известно, что 15-го числа 17-го месяца долг составит 400 тысяч рублей. И 15-го числа каждого месяца с 1-го по 16-й долг должен быть на одну и туже сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Т.е. за первые 16 месяцев необходимо погасить S-400 тысяч рублей одинаковыми платежами, т.е. уменьшение долга с 1-го по 16-й месяц составляет   тысяч рублей ежемесячно. Т.о., ежемесячный долг перед банком за первые 16 месяцев составляет: ; ; ; …; . Погашение долга за первые 16 месяцев состоит из двух частей: постоянной ежемесячной выплаты   и ежемесячной равномерно уменьшающейся выплаты процентов ; (; (); …; .

В последний 17-й месяц общая выплата составила 400 + 400 тысяч рублей. Общая сумма выплат

за 17 месяцев 1608=16 + ++ …+ 400 + 400 .

Ответ: 1200 тысяч

Задача № 9 на нахождение конкретной выплаты кредита, в случае неравномерного погашения долга

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- Со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на 80 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- К 15-му числу 11 месяца долг должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 10-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1198 тысяч рублей?

Задача № 9 на нахождение конкретной выплаты кредита, в случае неравномерного погашения долга

Решение: S - сумма кредита, r = 3%

Известно, 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на 80 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Т.е. с 1-го по 10-й месяц ежемесячный долг перед банком составляет:

; -80;-2*80; …;-10*80. Погашение долга за 10 месяцев состоит из двух частей: постоянной ежемесячной выплаты тысяч рублей и ежемесячной равномерно уменьшающейся выплаты процентов

; (; (); …; .

В последний 11-й месяц общая выплата составила -10*80 + (-10*80) тысяч рублей.

Общая сумма выплат за 11 месяцев 1198= 10*80++ + +...+); =1000

Долг 15-го числа 10-го месяца будет =200

Ответ: 200 тысяч

Задача № 9а на нахождение конкретной выплаты кредита, в случае неравномерного погашения долга

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- Со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 18-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- К 15-му числу 19 месяца долг должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 18-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1209 тысяч рублей? (Ответ: 100 тысяч рублей)

Задача № 9а на нахождение конкретной выплаты кредита, в случае неравномерного погашения долга

Решение: S - сумма кредита, r = 2%

Известно, 15-го числа каждого месяца с 1-го по 18-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Т.е. с 1-го по 18-й месяц ежемесячный долг перед банком составляет:

; -50;-2*50; …;-18*50. Погашение долга за 18 месяцев состоит из двух частей: постоянной ежемесячной выплаты тысяч рублей и ежемесячной равномерно уменьшающейся выплаты процентов

; (; (); …; .

В последний 19-й месяц общая выплата составила -18*50 + (-18*50) тысяч рублей.

Общая сумма выплат за 19 месяцев 1209= 18*50++ + +...+); =1000

Долг 15-го числа 18-го месяца будет =100

Ответ: 100 тысяч рублей